Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 231–233

Интерполяционные всплески в задаче оценки кривизны

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия*

Аннотация. Интерполяционно-ортогональные периодические всплески, построенные авторами ранее, применены для оценки кривизны графиков гладких функций, заданных своими отсчетами на равномерной двоично рациональной сетке.

Пусть $y = f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая 1-периодическая функция на прямой R. Как и в работе [1], рассматривается задача о конечномерной аппроксимации кривизны

$$K(x,f) = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$$

кривой — графика функции $f(x)$ в метрике пространства $C[0,1)$. Только теперь в качестве аппроксиманта берем кривизны графиков очень просто конструируемых функций из пространств $\widetilde{V}_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ 1-периодического кратномасштабного анализа (КМА), порожденного масштабирующими функциями $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2)$ из нашей работы [2]. Там $\varphi_s(x)$ — модифицированные масштабирующие функции Мейера – Осколкова $\varphi_\varepsilon(x)$ [3, 4], которые определяются своими преобразованиями Фурье $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ такими, что

$$\operatorname{supp}\widehat{\varphi}_\varepsilon = [-(\varepsilon+1)/2, (\varepsilon+1)/2] \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1/3),$$

$|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|$ — гладкие четные функции, тождественные единице при $|\omega| < (1-\varepsilon)/2$, и такие, что $|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2 + |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)|^2 \equiv 1$ при $\omega \in [(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$. Для простоты считаем, что $|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|$ возрастает на $[-(\varepsilon+1)/2, (\varepsilon-1)/2]$. Тогда, если $\varphi'((1+\varepsilon)/2) = 0$ и $\widehat{\varphi}'_\varepsilon(\omega)$ есть функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, то $|\varphi_\varepsilon(x)| \leqslant C(\varphi_\varepsilon)(1+|x|)^2$, $C(\varphi_\varepsilon) \leqslant 1 + \mathrm{Var}_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)/(2\pi)^2$. Для краткости мы здесь используем только одну модификацию: $\varphi_2(x) = \int\limits_R \widehat{\varphi}_2(\omega)e^{2\pi i x\omega}$ функции $\varphi_\varepsilon(x)$, полагая

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}_{2,\varepsilon}(\omega) = |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2 + i|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|\big(|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)| + |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)|\big).$$

(В [1] мы считали, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) \geqslant 0$, но это и условия монотонности функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ при $\omega < 0$ и при $\omega > 0$ необязательны).

В [1] доказано, что функции $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2)$ порождают системы $\{\varphi_s(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ $(j \in \mathbb{Z})$ одновременно ортогональные и интерполяционные:

$$\big(2^{j/2}\varphi_s(2^j x - k), 2^{j/2}\varphi_s(2^j x - l)\big)_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{k,l};\ \varphi_s(2^j x - l)\Big|_{x=k/2^j} = \delta_{k,l}.$$

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Исследования второго автора также поддержаны Программой государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1).

Оказалось, что аналогичными свойствами обладают и 1-периодизации

$$\widetilde{\Phi}_{s,j,k}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_s(2^j(x+\nu)-k) \quad (j\in\mathbb{Z}_+,\ k=0,1,\ldots,2^j-1,\ \Phi_{s,0,0}\equiv 1)$$

функций $\varphi(2^jx-k)$. Это тригонометрические полиномы порядка $N_j=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, в частности, при $s=2$ равные

$$\widetilde{\Phi}_{j,k}(x) = 2^{-j}\Bigg(1+2\sum_{l=1}^{[2^{j-1}(1+\varepsilon)]}\Big|\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{l}{2^j}\Big)\Big|^2\cos 2\pi l\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)-$$

$$-2\sum_{l=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]}^{[2^{j-1}(1+\varepsilon)]}\Big|\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{l}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{l}{2^j}-1\Big)\Big|\sin 2\pi l\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Bigg).$$

При $j\in\mathbb{N}$ и $0\leqslant k,l\leqslant 2^j-1$ имеем

$$\big(2^{j/2}\widetilde{\Phi}_{j,k},2^{j/2}\widetilde{\Phi}_{j,l}\big)=\delta_{k,l} \ \text{ и } \ \widetilde{\Phi}_{j,k}\Big(\frac{l}{2^j}\Big)=\delta_{k,l}.$$

Все эти данные (для $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\geqslant 0$) обоснованы в [1] и приведены здесь для удобства читателя. Там же (при доказательстве теоремы 3) доказано, что для любой функции $f(x)\in\widetilde{C}^{(r)}_{[0,1]}$ и ее интерполяционной проекции

$$S_{2^j}(x,f)=\sum_{k=0}^{2^j-1} f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\widetilde{\Phi}_{j,k}(x)$$

на пространство $\widetilde{V}_j=\operatorname{span}\{\widetilde{\Phi}_{j,k}(x):\ k=0,1,\ldots,2^j-1\}$ при каждом $\nu=0,1,\ldots,r$ и $2^j\geqslant r$ справедлива оценка

$$\|f^{(\nu)}(x)-S^{(\nu)}_{2^j}(x,f)\|_{C[0,1)}\leqslant C(r,\widehat{\varphi}_\varepsilon)E_{N_j(\varepsilon)}(f^{(\nu)}), \tag{1}$$

где $N_j(\varepsilon)=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]\asymp 2^j$, $E_N(g)$ — наилучшее приближение в $C[0,1)$ функции $g(x)$ тригонометрическими 1-периодическими полиномами порядка n, $C(r,\widehat{\varphi}_\varepsilon)<(4/\pi^2)\ln r+$ $+\pi e+4+C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)$, $C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)\leqslant 2\pi K_{N_j(\varepsilon)}$ (см. [5] и [2]) (K_n $(n\in\mathbb{N})$ — константы Фавара).

С помощью (1), применяя схему доказательства работы [1] с заменой примененных там аппроксимантов для функций $y'=f'(x)$ и $y''=f''(x)$ на $S_{2^j}(x,f)$ и $S''_{2^j}(x,f)$, получаем следующий результат о погрешности аппроксимации кривизны $K(x,f)$ кривой $y=f(x)$ с помощью кривизны $K(x;S_2;(f))$ аппроксимирующей ее кривой $y=S_{2^j}(x,f)$.

Теорема. *Для каждой дважды непрерывно дифференцируемой 1-периодической функции $f(x)$ при аппроксимации ее интерполяционной проекцией $S_{2^j}(x,f)$ на подпространство $\widetilde{V}_j\subset C[0,1)$ справедлива следующая оценка уклонения кривизны $K(x;S_2;(f))$ от кривизны $K(x,f)$:*

$$|K(x,f)-K(x,S_{2^j})|\leqslant C(2,\widehat{\varphi}_\varepsilon)(E_{N_j(\varepsilon)}(f'')+|f''(x)|E_{N_j(\varepsilon)}(f'))$$

Следствие. *На классе*

$$W^{(r)}=\{f(x):\ f(x+1)\equiv f(x)\ \ \textit{на}\ \ R,\ f^{(r-1)}(x)\ \ \textit{— непрерывные},\ \ |f^{(r)}(x)|\leqslant 1\ \ \textit{п.в.}\}$$

имеем

$$|K(x,f)-K(x;S_{2^j};(f))|\leqslant C(r,\widehat{\varphi}_\varepsilon)(2\pi)^{r-2}K_{r-2}(2^j+K_{n-1}(2\pi)^{r-1})E_{N_j(\varepsilon)}(f^{(r)}).$$

Здесь использованы известные неравенства для 2π-периодических функций $g(x)$ и их наилучших приближений $E_n(f)_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка n:

$$E_n(f) \leqslant \frac{K_r}{n^r} E_n(f^{(r)}) \quad (r \in \mathbb{N}),$$

вытекающие из неравенства Фавара $\|f\| \leqslant K_r \|f^{(r)}\|$ (K_r — константа Фавара, см., например, [1]).

Список литературы

1. *Субботин Ю.Н.* Равномерная аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 273–276.
2. *Субботин Ю.Н.*, *Черных Н.И.* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
3. *Meyer Y.* Ondelettes. Paris: Herman, 1990.
4. *Offin D.*, *Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 319–325.
5. *Гаркави А.Л.* О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Известия АН СССР. Серия матем. 1960. Т. 24. С. 103–128.